INTERROGATION N°1 – LOGIQUE (SUJET A) – CORRIGÉ

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit f une fonction réelle. Écrire la négation de $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \Big(|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \Big)$.

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \delta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x, y \in \mathbb{R} \qquad (|x-y| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon)$$

2) Soit P, Q deux assertions. Dresser la table de vérité de $P \implies (Q \iff P)$.

P	Q	$Q \iff P$	$P \implies (Q \iff P)$
F	F	V	V
F	V	F	V
V	F	F	F
V	V	V	V

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si 2 divise $n^2 - 1$, alors n est impair.

On raisonne par contraposée. Montrons que si n est pair, alors 2 ne divise pas $n^2 - 1$, c'est-à-dire $n^2 - 1$ est impair.

Comme n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ ($k \in \mathbb{N}$ marche aussi) tel que $n = 2k$. Alors,

$$n^2 - 1 = 4k^2 - 1$$

Comme $4k^2 = 2(2k^2)$ est pair (car $2k^2 \in \mathbb{Z}$), alors $n^2 - 1$ est impair. D'où le résultat.

4) On pose $R : \exists x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad xy \leq 0$. La proposition R est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Montrons que R est vraie. On pose $x = 0 \in \mathbb{Z}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a bien

$$xy = 0y = 0 \leq 0$$

Ainsi, R est vraie.

Interrogation n°1 – Logique (sujet B)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Écrire la négation de l'assertion $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \exists x, y \in \mathbb{R} \qquad (\alpha x + \beta y < 0 \quad \text{et} \quad \beta x + \alpha y \notin \mathbb{Z})$.

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \alpha x + \beta y \geq 0 \quad \text{ou} \quad \beta x + \alpha y \in \mathbb{Z}$$

2) Soit P, Q deux assertions. Dresser la table de vérité de $P \iff (Q \implies P)$.

P	Q	$Q \implies P$	$P \iff (Q \implies P)$
F	F	V	F
F	V	F	V
V	F	V	V
V	V	V	V

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $n + x$ n'est pas un entier, alors x n'est pas un entier.

Montrons la contraposée, càd que si x est entier, alors $n + x$ est un entier. Si x est entier, comme n l'est aussi, alors nécessairement $n + x$ est également un entier. D'où le résultat.

4) On pose $R : \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{Z} \qquad x + y \leq 0$. La proposition R est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Montrons que R est vraie. Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose x un entier inférieur ou égal à $-y$ (un tel entier existe toujours). Alors $x \in \mathbb{Z}$ et $x \leq -y$ donc $x + y \leq 0$. Ainsi, R est vraie.